

ESTUDI DE L'ENSENYAMENT- APRENENTATGE DE LA MULTIPLICACIÓ DE FRACCIONS

Treball de Final de Grau en Mestre/a d'Educació Primària

Nom i cognoms: Mireia Rafart Riqué

4t MEP

Tutora: Isabel Sellas Ayats

Curs 2013 – 2014

Vic, 16 de maig de 2014

Resum

Aquest treball és una investigació de com cal ensenyar la multiplicació de fraccions a l'Educació Primària. S'han recollit les dades a través d'entrevistes per conèixer com 6 mestres ensenyaven aquest coneixement matemàtic per comparar-ho amb el que diuen diferents autors com Van de Walle, Tipps, Tucker i Bruner. L'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions és un procés difícil i complex. Per adquirir aquest coneixement, els infants necessiten tenir experiències amb diferents situacions que es plantegi el producte de fraccions i deduir ells mateixos estratègies i algorismes propis per resoldre-les. Si se'ls dóna directament l'algorisme tradicional sense comprensió, tindran dificultats per identificar si el resultat és coherent o no.

Paraules clau

Multiplicació de fraccions, algorisme tradicional, fraccions, coneixements dels mestres, matemàtiques.

Abstract

This paper is an investigation focused on how to teach multiplication of fractions in Middle School. Data were collected through the realization of several interviews to six teachers in order to know how to teach this mathematical knowledge. Additionally, to compare it with what the different authors like Van de Walle, Tipps, Tucker and Bruner say. The process of teaching and learning the multiplication of fractions is a difficult and complex process. To acquire this knowledge, children need to have experiences with different situations that raise the product of fractions themselves and be able to decide their own strategies and algorithms for solving them. If the traditional algorithm without understanding is given directly, they will have difficulties to identify if the result is coherent or not.

Key words

Multiplication of fractions, traditional algorithm, fractions, knowledge of teachers, mathematics.

Índex

0.	Introducció	3
1.	Marc teòric	5
1.1.	Introducció de les fraccions i la multiplicació de fraccions	5
1.1.1.	Concepte de fracció – interpretacions	5
1.1.2.	Tipus de fraccions.....	8
1.1.3.	Concepte de multiplicació de fraccions – interpretacions.....	9
1.2.	Coneixements didàctics.....	11
1.2.1.	Aspectes generals de l’ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.....	12
	Principis dels processos d’ensenyament i d’aprenentatge	12
	El constructivisme	12
	Etapas de Bruner: Concret, Representació i Abstracte	13
1.2.2.	Ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions.....	14
	La multiplicació de fraccions en els currículums	14
	Introducció de la multiplicació de fraccions.....	17
	Ensenyament-aprenentatge de l’algorisme tradicional.....	20
	Models de representació	21
2.	Aplicació pràctica	22
2.1.	Metodologia	22
2.1.1.	Objectius de la recerca.....	22
2.1.2.	Metodologia de recerca i tècnica de recollida de dades.....	23
2.1.3.	Fases de la recerca	25
2.2.	Buidatge de dades.....	27
2.3.	Resultats de l’anàlisi de les dades	30
2.3.1.	Categories.....	30
	Experiència dels mestres.....	30
	Materials i recursos.....	31
	Algorisme tradicional	32
	Introducció de la multiplicació de fraccions.....	33
	Coneixements que tenen els mestres de la fracció i la multiplicació de fraccions	34
3.	Conclusions	36
4.	Bibliografia	39

0. Introducció

El present treball és la memòria del Treball de Final de Grau en Mestre d'Educació Primària. Tal com mostra el títol, es fa un estudi de l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions. Les dades s'han recollit de mestres de diferents escoles properes a Centelles. Els resultats es comparen amb el que diuen diferents autors com Van de Walle, Tipps, Tucker i Bruner. El tema és de l'àrea de matemàtiques, ja que és l'itinerari que he triat al Grau com a especialització i en el qual tinc més interès.

El motiu pel qual he escollit la multiplicació de fraccions ha estat l'interès que em despertava el seu ensenyament-aprenentatge als infants de l'Educació Primària. Amb això, volia veure què diuen diferents autors i analitzar com ho porten a terme a les escoles properes a la meua població que és Centelles. A més a més, la meua experiència com a alumna ha estat aprendre aquesta operació de manera mecànica sense entendre quin és el seu significat. De cara al meu futur professional, el present treball m'ajudarà a ensenyar aquest coneixement matemàtic, entre altres com les fraccions, de manera més significativa als meus futurs alumnes.

Al inici de la investigació, em vaig plantejar uns objectius a assolir després de dur a terme tot el procés de recerca. Aquests són els següents:

- Estudiar el que els autors diuen sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions.
- Analitzar les creences que tenen diferents mestres sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions i quina metodologia utilitzen a l'aula.
- Comparar l'ensenyament que fan els mestres en relació a la multiplicació de fraccions amb el marc teòric elaborat.

Amb els objectius també em vaig plantejar dues hipòtesis que descriu a continuació:

- La majoria de mestres ensenyaran la multiplicació de fraccions amb l'algorisme tradicional.
- La majoria de mestres no utilitzaran materials manipulatius per ensenyar la multiplicació de fraccions.

Les tècniques que vaig escollir per tal de recollir les dades, van ser l'entrevista i el qüestionari que vaig fer per 6 mestres de diferents escoles de Centelles.

Pel que fa a l'estructura del treball, els apartats que el componen són els següents:

En primer lloc, hi ha el marc teòric que inclou diferents apartats amb el qual es fa un recull del que diversos autors diuen sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions a l'Educació Primària. Està dividit en dos blocs. Per una banda, hi ha una introducció de les fraccions i la multiplicació de fraccions. Per altra banda, els continguts didàctics. En el primer, es desenvolupen els conceptes de fracció i multiplicació d'aquests i les seves interpretacions. En el segon, hi ha aspectes generals de l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques i de la multiplicació de fraccions per separat.

En segon lloc, hi trobem l'aplicació pràctica del treball. Per una banda, hi ha la metodologia emprada amb els objectius, el tipus d'investigació, la tècnica de recollida de dades i les fases de la recerca. Per altra banda, el buidatge de dades, els resultats de l'anàlisi de les dades.

En tercer lloc, hi ha les conclusions tretes de la comparació entre els resultats de l'anàlisi i la informació aportada pels diferents autors recollida al marc teòric. A més a més, faig una valoració final del treball i del Grau de Mestre d'Educació Primària.

Finalment, hi ha la bibliografia emprada per fer tot el treball.

1. Marc teòric

En aquest apartat, hi trobem la fonamentació teòrica del treball. Està organitzat en dos blocs que, alhora, estan dividits en altres apartats. Per una banda, tenim una introducció de les fraccions i la multiplicació de fraccions on s'explica els dos conceptes i les diferents interpretacions que en fan alguns autors. Per altra banda, trobem els coneixements didàctics per tal de dur a terme el procés d'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions que consta de dos apartats: els aspectes generals de l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques i de la multiplicació per separat. En el primer, hi ha desenvolupats aspectes més generals i, en el segon, més concrets del producte de fraccions.

1.1. Introducció de les fraccions i la multiplicació de fraccions

En aquesta secció, hi trobem explicacions pel que fa al concepte de fracció i al de multiplicació de fraccions. De cada un s'explica què és i quines interpretacions se'n poden fer segons el que descriuen diferents autors.

1.1.1. Concepte de fracció – interpretacions

Les fraccions són una part del conjunt de nombres coneguts com a nombres racionals i que s'escriuen amb la forma a/b on a i b són enters i $b \neq 0$ (Chapin i Johnson, 2006). Els nombres a i b s'anomenen numerador i denominador respectivament. Tucker, Singleton i Weaver (2006: 202) afirmen que les fraccions es poden fer servir per indicar diferents elements; ja sigui una part d'una regió, on cadascuna d'elles ha de ser igual, o una part d'un conjunt, on cada part ha de tenir el mateix nombre d'objectes. A més a més, les fraccions són una de les maneres de representar els nombres racionals (Flores i Torralbo, 2011: 195).

Pel que fa a les interpretacions que se'n poden fer, n'hi ha diverses. Diferents autors com Tucker et al. (2006: 196), Lamon (2012), Flores i Torralbo (2011: 194-195) i Behr,

Harel, Post i Lesh (1992); Kieren (1988); citats per Chapin i Johnson (2006: 99-114) en parlen de tres: fraccions com una divisió, com una proporció i com una part d'un total. Tanmateix, Flores i Torralbo (2011: 194-195); Behr, Harel, Post i Lesh (1992); Kieren (1988), citats per Chapin i Johnson (2006: 99-114) i Lamon (2012), afegeixen dues altres maneres: fraccions com un operador i com una mesura. Encara, Lamon (2012: 30) proposa la fracció com a nombre.

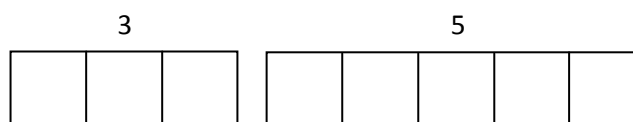
En la taula que hi ha a continuació estan detallades les diferents interpretacions segons el que diuen els autors:

		Autors			
		Tucker et al. (2006: 196)	Lamon (2012)	Flores i Torralbo (2011: 194-195)	Behr, Harel, Post i Lesh (1992); Kieren (1988); citats per Chapin i Johnson (2006: 99-114)
Interpretacions de les fraccions	Com una proporció	X	X	X	X
	Com una divisió	X	X	X	X
	Com una part d'un total o d'un conjunt	X	X	X	X
	Com un operador		X	X	X
	Com una mesura		X	X	X
	Com un nombre		X		

Taula 1: Les interpretacions de les fraccions segons diferents autors.

Tots ells defineixen cadascuna de les interpretacions de manera semblant i es descriuen a continuació:

- *Fraccions com una proporció*: és una comparació entre dues parts i s'entén que el numerador és una part del denominador, sent així proporcionals. D'aquesta manera, la fracció $3/5$ s'entén com la comparació entre el 3 i el 5, on 3 és $3/5$ tant gran com el 5.

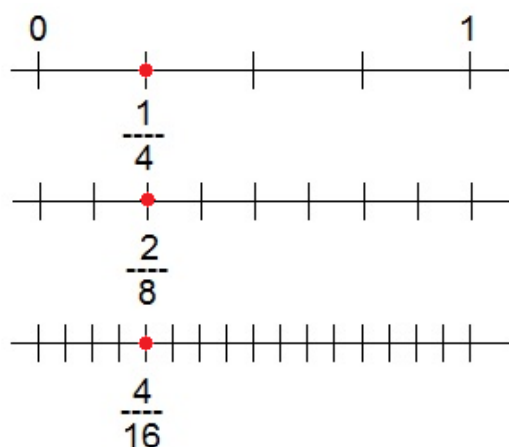


- *Fraccions com una divisió*: es divideixen dos nombres, és a dir, el numerador entre el denominador. Com a exemple, la fracció $3/5$ s'interpreta com dividir 3 entre 5.
- *Fraccions com a part d'un total o d'un conjunt*: aquesta fracció s'entén com la partició d'un total en parts iguals o bé d'un conjunt en quantitats més petites amb el mateix nombre d'elements cadascuna. Flores i Torralbo (2011: 194) assenyalen: “el número racional expresa una relació multiplicativa entre el nombre de parts que formen la porció i el total de parts considerades”. Així, la fracció $3/5$ es pot entendre com agafar 3 de les 5 parts iguals d'una determinada unitat.



- *Fraccions com un operador*: en aquest cas, la fracció forma part d'una operació multiplicativa on determina una part d'una determinada quantitat/total. Així, ho podem veure amb un exemple: $3/5$ de 10. Es divideix la unitat en les parts iguals que indica el denominador i es multipliquen per la quantitat que mostra el numerador. Aquest és un tipus de multiplicació que s'explica més endavant a l'apartat 1.1.3.
- *Fraccions com una mesura*: la fracció s'interpreta com una comparació multiplicativa entre les dues quantitats on una d'elles és la unitat de mesura. La fracció és proporcional a la unitat de mesura utilitzada.

- *Fraccions com un nombre*: es té en compte el nombre racional que representa, és a dir, la quantitat. Per exemple, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ i $\frac{4}{16}$ venen a ser el mateix nombre, ja que indiquen la mateixa quantitat. Si els representéssim en una recta numèrica, serien el mateix punt.



1.1.2. Tipus de fraccions

Pel que fa als tipus de fraccions que hi ha, en podem fer diferents classificacions a partir de diversos criteris:

En funció del numerador, en podem veure dos tipus (Tucker et al., 2006):

- *Fracció unitària*: és aquella que té com a numerador 1. S'obté dividint la unitat en parts iguals i correspon a una d'elles.
- *Fracció no unitària*: és aquella que el numerador és diferent d'1. És el resultat d'agafar més d'una fracció unitària.

Flores i Torralbo (2011) afegeixen dos tipus més:

- *Fracció pròpia*: és aquella que el resultat és menor que 1. Això implica que el numerador és més petit que el denominador.
- *Fracció impròpia*: és aquella que el numerador és més gran que el denominador, és a dir, representa una part més gran que la unitat. Aquesta es pot escriure de manera equivalent amb nombres mixtes on s'escriu primer un

nombre enter que indica les unitats senceres seguit de la fracció restant i que és inferior a la unitat.

També podem diferenciar les fraccions, segons Tipps, Johnson i Kennedy (2011), en funció del denominador de la manera següent:

- *Fraccions comunes*: són les que tenen com a denominador un nombre diferent d'una potència de 10.
- *Fraccions decimals*: són les que el denominador és una potència de 10, és a dir, 10, 100, 1000, etc.

Els tipus de fraccions descrites es poden veure en la taula següent:

		Fracció	Descripció	Autors
El numerador	= 1	Unitària	El numerador és 1.	Tucker et al. (2006)
	≠ 1	No unitària	El numerador és diferent d'1.	
El resultat	< unitat	Pròpies	És més petit que la unitat.	Torres i Torralbo (2011)
	> unitat	Impròpies	És més gran que la unitat.	
El denominador	≠ potència de 10	Comunes	El denominador és diferent a una potència de 10.	Tipps et al. (2011)
	= Potència de 10	Decimals	El denominador és una potència de 10.	

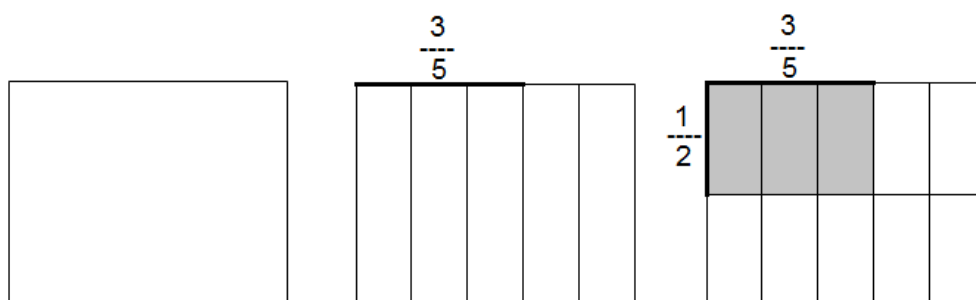
Taula 2: Tipus de fraccions segons diferents autors.

1.1.3. Concepte de multiplicació de fraccions – interpretacions

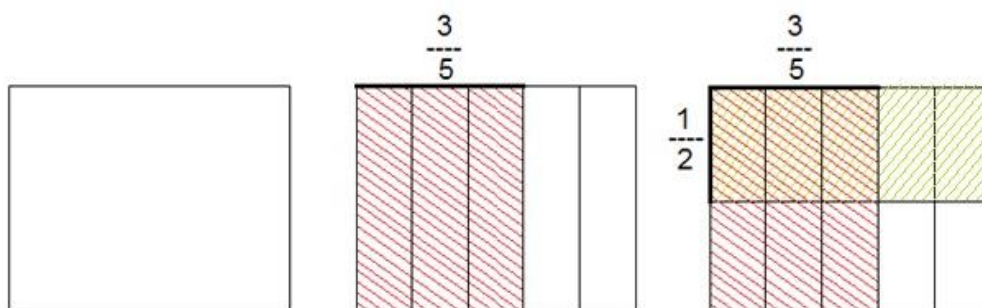
Per interpretar la multiplicació de fraccions, Chapin i Johnson (2006: 125-127) i Tucker et al. (2006: 219-223) descriuen tres enfocaments. Aquests són els següents:

- *Com a fracció d'una fracció*: agafant dues fraccions s'interpreta que el símbol de multiplicar "x" és el mateix que el mot "de" i, d'aquesta manera, el resultat és la part que indica la primera fracció de la segona.

- *Model d'àrea*: en aquest cas s'agafa el model que ja s'utilitza per la multiplicació de nombres enters, un rectangle. A partir d'aquest, es marca una de les fraccions en la llargada. Seguidament, es fa el mateix amb l'amplada i l'altra fracció. El resultat de la multiplicació és representat amb el rectangle/quadrat que té com a costats les fraccions indicades. Veiem l'exemple $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ en la imatge següent:



- *“La part comuna de dues fraccions”*: amb el mateix model que l'anterior, es fan les parts de la llargada i l'amplada a partir de les fraccions de la multiplicació. S'agafa com a resultat la part comuna entre les particions vertical i horitzontals. Amb la imatge veiem la multiplicació $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$:



Chapin i Johnson (2006: 126) afegixen un altre model per tal d'interpretar el producte de fraccions. Aquest és una taula de funcions on es poden veure els diferents resultats de multiplicar una mateixa fracció per diversos nombres enters/fraccionaris. A la taula que es mostra a continuació, hi ha un exemple amb la fracció $\frac{1}{2}$ per diversos enters. Es pot observar que els resultats sempre són més petits que l'enter pel qual s'ha multiplicat la fracció.

Multiplicació	Resultat
$2 \times \frac{1}{2}$	1
$10 \times \frac{1}{2}$	5
$24 \times \frac{1}{2}$	12
$30 \times \frac{1}{2}$	15
$50 \times \frac{1}{2}$	25
$86 \times \frac{1}{2}$	43

Taula 3: Multiplicació d'enter per fracció.

A més d'aquestes interpretacions, cal tenir en compte que podem trobar multiplicacions entre fraccions i entre una fracció i un enter. A continuació estan detallades les tres possibilitats:

- *Enter per fracció*: s'entén com una suma iterada de nombres fraccionaris.
- *Fracció per enter*: s'entén com una part d'un enter i amb la propietat commutativa de la multiplicació, és com una suma iterada tal com un enter per una fracció.
- *Fracció per fracció*: s'entén com una part d'una altra part d'una unitat.

Les fraccions que formen part de les multiplicacions poden ser pròpies o impròpies.

1.2. Coneixements didàctics

En aquesta secció es desenvolupa com s'ha de dur a terme l'ensenyament de la multiplicació de fraccions. Per una banda, hi ha tres aspectes generals de l'ensenyament de les matemàtiques. Aquests són els principis dels processos d'ensenyament i d'aprenentatge, el constructivisme i les etapes de Bruner. Per altra banda, hi ha aspectes concrets de l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions. Aquests són el producte de fraccions en el currículum, com s'introdueix, l'ensenyament de l'algorisme tradicional i els models de representació que s'utilitzen.

1.2.1. Aspectes generals de l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques

Principis dels processos d'ensenyament i d'aprenentatge

Abans de començar a parlar de la l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions, crec indicat parlar sobre els processos d'ensenyament i d'aprenentatge de les matemàtiques. En concret, Tipps et al. (2011:6) diuen que cal tenir en compte que aquests processos a l'escola tenen uns principis per tal de ser efectius.

Per una banda, l'ensenyament requereix complir els tres principis descrits a continuació:

- Conèixer i comprendre les matemàtiques, veure els estudiants com aprenents i conèixer les estratègies pedagògiques.
- Oferir un ambient de classe estimulants i de suport, és a dir, allò que hi ha disponible a l'aula i la interacció del docent amb els alumnes i entre alumnes, ha de permetre un bon procés d'ensenyament-aprenentatge.
- Buscar sempre la millora, és a dir, el docent cal que s'avaluï i canviï allò que falla.

Per altra banda, l'aprenentatge requereix complir el principi següent:

- És essencial la comprensió, és a dir, que els alumnes entenguin el que estan fent i adquireixin la competència matemàtica sabent aplicar allò que van aprenent.

El constructivisme

L'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques en el que es basen els diferents autors citats, segueix el *constructivisme* com a teoria d'aprenentatge. Segons aquesta, els nens i nenes aprenen amb la interacció amb els objectes, els esdeveniments i les persones. Per tant, tenen un bagatge i uns coneixements que han anat adquirint amb l'experiència. Els coneixements que ja tenen, formen una xarxa. Per adquirir-ne un de

nou, aquest ha d'estar relacionat amb algun dels que ja té (Tipps et al., 2011: 58). Rodríguez (2002: 94) diu que comprenem allò que té una relació amb allò que ja sabem i que oblidem allò que ens sembla estrany i no connecta amb els coneixements previs que tenim. Per això, és tant important conèixer què saben els infants per poder partir des d'aquest punt, ja que a partir de les zones de desenvolupament proper, els podrem donar l'ajuda necessària per aprendre i construir el coneixement de cada alumne/a.

A més a més, Vygotsky (1962), citat per Tipps et al. (2011: 58), afirma que és important el feedback i el diàleg per anar construint el coneixement. Per tant, cal que hi hagi interacció entre mestre/a i l'alumne però també entre infants.

Etapas de Bruner: Concret, Representació i Abstracte

Per tal de millorar l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques, Bruner (1960), citat per Tipps et al. (2011: 59), afirma que hi ha tres estadis pels quals els alumnes haurien de passar i assolir per tal d'adquirir un coneixement matemàtic. Aquests són els següents:

- *Concret*: en el qual els alumnes han de tenir experiències amb objectes físics que puguin manipular en relació al contingut que es treballa. Aquests objectes han de poder ser representats per ser utilitzats en el següent estadi, el de representació.
- *Representació*: en el qual els alumnes duen a terme activitats en les que intervenen representacions gràfiques.
- *Abstracte*: en el qual els alumnes fan activitats amb paraules, nombres i símbols matemàtics com els de les operacions \times i $=$.

En activitats que proposen els diferents autors citats en el present marc teòric, s'utilitzen diferents materials manipulatius a l'hora de realitzar aquelles que introdueixen el tema. Aquests materials són varis com els que s'utilitzen per treballar les fraccions. Alguns exemples poden ser els cercles amb diferents particions o un full de paper que representa una unitat i equival al model d'àrea esmentat anteriorment.

1.2.2. Ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions

Tots els autors citats que parlen sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions, coincideixen que el procés de multiplicar és difícil per l'infant i la dificultat que comporta la seva comprensió, és a dir, és un coneixement difícil d'adquirir i comprendre per part dels alumnes (Lamon, 2012: 9; Chapin i Johnson, 2006: 124).

La multiplicació de fraccions en els currículums

La multiplicació de fraccions és un coneixement matemàtic que està escrit que s'ha de començar a ensenyar a Cicle Superior de l'Educació Primària.

En el cas de Catalunya, tenim el Currículum de l'etapa citada en el qual el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya marca, entre altres, quins objectius han d'assolir com a mínim els infants de 6 a 12 anys a l'escola i a partir de quins continguts cal que ho facin. Dins del bloc de continguts de numeració i càlcul, es troben els continguts relacionats amb les fraccions. Referent a la multiplicació de fraccions, només hi ha un contingut citat a Cicle Superior i dins de numeració i càlcul i de comprensió de la funcionalitat del càlcul i l'estimació. Aquest diu el següent:

- Estimació raonable de les operacions amb nombres naturals, decimals i fraccionaris.

A més a més, també tenim els principis i estàndards de les matemàtiques a l'escola establerts pel National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que mostren què han d'assolir els alumnes en l'etapa d'escolarització. En relació a les fraccions i a la multiplicació de fraccions en els diferents cursos mostren el següent (Tipps et al., 2011: 311-312):

Numeració i operacions

Estàndard	De 3r fins a 5è d'Educació Primària	De 6è d'Educació Primària fins a 2n d'ESO
	<i>Tots els estudiants haurien de...</i>	
Comprendre els nombres, la maneres de representar-los, les relacions que hi ha entre ells i els conjunts numèrics.		Treballar de forma flexible amb fraccions, decimals i percentatges per resoldre problemes.
Comprendre el significat de les operacions i com es relacionen entre sí.	<p>Comprendre diferents significats de la multiplicació i la divisió.</p> <p>Identificar i utilitzar les relacions entre operacions, la divisió com a operació inversa de la multiplicació, per resoldre problemes.</p> <p>Comprendre i utilitzar les propietats de les operacions, la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma.</p>	<p>Comprendre el significat i els efectes de les operacions aritmètiques amb fraccions, decimals i sencers.</p> <p>Utilitzar les propietats associativa i commutativa de la suma i la multiplicació; i la distributiva de la multiplicació respecte de la suma per simplificar càlculs amb nombres sencers, fraccions i decimals.</p> <p>Comprendre i utilitzar les relacions entre la suma i la resta; la multiplicació i la divisió, potències i arrels quadrades, per a simplificar càlculs i resoldre problemes.</p>

Calcular amb fluïdesa i fer estimacions raonables.		<p>Seleccionar i aplicar mètodes i eines adients per cada situació per a calcular amb fraccions i decimals, escollint entre càlcul mental, estimació, calculadora, ordinador i paper i llapis.</p> <p>Desenvolupar i analitzar algorismes per calcular amb fraccions, decimals i nombres sencers, i desenvolupar fluïdesa entre ells.</p> <p>Desenvolupar i utilitzar estratègies per fer estimació dels resultats dels càlculs amb nombres racionals.</p>
--	--	--

Taula 4: Estàndards de Numeració i Operacions de 3r de Primària fins a 2n d'ESO (Tipps et al., 2011: 582-583).

Pel que es pot veure en la taula 4 i el que diu el currículum d'Educació Primària a Catalunya, fins al 5è curs, els alumnes treballen la fracció i els diferents conceptes relacionats amb aquesta. Han de conèixer què són, com es poden representar, les equivalències, l'ordenació i les operacions aritmètiques com la suma i la resta. En canvi, la multiplicació i la divisió no es treballa, com a mínim, fins al 6è curs. Tot i això, on s'hi dedica més temps és a l'etapa de Secundària.

Introducció de la multiplicació de fraccions

A l'hora d'ensenyar un coneixement nou, cal tenir present que, tal com diu el constructivisme, els alumnes tenen un bagatge i uns coneixements previs que cal aprofitar i que els ajuda a adquirir nous coneixements.

Per una banda, abans d'abordar el tema i per tal d'ensenyar als infants la multiplicació de nombres fraccionaris, aquests han de tenir una base consolidada del concepte de fracció (Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2010: 316). Un aspecte a destacar d'aquests nombres és la idea d'unitat i que representen una part d'aquesta, que no són sencers com els enters. Cal tenir en compte que amb les fraccions, cada situació diferent pot tenir una determinada unitat (Lamon, 2012: 21). A tall d'exemple, per un banda puc tenir una pizza a repartir entre 8 persones. En aquest cas, la unitat és una pizza. Per altra banda, puc tenir 3 pizzes a repartir entre les mateixes persones. En aquest cas, puc tenir com a unitat les tres pizzes o bé pot ser que cadascuna de les pizzes la divideixi en 8 parts i cada persona li pertocuen $\frac{3}{8}$. Així, si els alumnes tenen una base consolidada de les fraccions, a l'hora d'aprendre la multiplicació de fraccions, els permetrà establir connexions entre els coneixements nous i els que ja tenien.

Tal com esmenten Chapin i Johnson (2006: 125), perquè els alumnes compreguin bé el producte de fraccions, requereix entendre el nombre fraccionari com un operador; quan la fracció actua sobre una altre nombre, ja sigui enter o racional i el modifica. D'aquesta manera, el símbol que s'utilitza per aquesta operació, "x", es pot canviar per el mot "de" i a l'inversa.

Per altra banda, pel que fa a les operacions, el més proper que tenen assolit és la multiplicació de nombres enters. Tot i això, aquesta és diferent de la multiplicació de fraccions. Amb els nombres enters, el resultat és més gran que els seus termes. En canvi, amb els nombres fraccionaris el resultat pot ser més petit. El fet que la multiplicació per enters s'entengui com una suma iterada o com fer diferents grups, és un dels motius pels quals els alumnes tenen més dificultats amb la operació esmentada amb fraccions. Per això, si els alumnes generalitzen la multiplicació d'enters per aprendre la de nombres fraccionaris, els pot portar a confusions (Chapin i Johnson, 2006: 125); Van de Walle et al., 2010: 316). Tanmateix, es pot utilitzar la comprensió de les operacions amb nombres enters per donar un significat a les operacions amb nombres fraccionaris, és a dir, per comprendre-les.

Partint d'això, Burns (2003) proposa 6 sessions per tal d'ensenyar la multiplicació de fraccions a alumnes Cicle Superior d'Educació Primària. Aquestes estan descrites a continuació:

En primer lloc, es pot començar acordant amb els alumnes les idees principals sobre què significa multiplicar nombres enters. Aquests acords són els següents:

1. La multiplicació és una suma iterada.
2. *Vegades* vol dir *grups de*.
3. Un problema de multiplicació es pot mostrar amb un rectangle.
4. Es pot girar l'ordre dels factors i el resultat és el mateix.
5. Pots descomposar els nombres per fer la multiplicació més fàcil.
6. Quan multipliques dos números, el resultat és més gran que els factors.

En segon lloc, es pot seguir comprovant si les idees acordades anteriorment serveixen per la multiplicació de fraccions. De les afirmacions anteriors, només són certes les número 4, 5 i 6 amb la multiplicació de fraccions. A continuació hi ha la resta formulades de manera que són certes:

- La multiplicació és una suma iterada en el cas d'enter per fracció o a l'inrevés.
- *Vegades* vol dir *de*.
- Quan multipliques dos números, el resultat és més gran que els factors, excepte si un d'ells és zero, un o una fracció més petita que un.

En tercer lloc, per continuar es pot estimar la resposta de problemes de multiplicacions de fraccions, de nombres mixtes i de nombres enters.

En quart lloc, es dibuixen rectangles per representar les solucions dels problemes per tal de construir la idea de multiplicar fraccions.

En cinquè lloc, es multipliquen dos nombres mixtes.

En sisè lloc, es posa a la pràctica un joc de multiplicar per practicar la multiplicació i la comparació de fraccions.

Una altra aportació que fan Van de Walle et al. (2010:317) és que recomanen seguir els passos següents perquè els alumnes desenvolupin les seves pròpies estratègies per resoldre la multiplicació de fraccions:

- Començar amb tasques que comportin un context simple i que els estudiants desenvolupin els seus propis mètodes.
- Connectar el significat de la multiplicació de fraccions amb el de la multiplicació entre nombres enters. Aquest punt està desenvolupat més amunt .
- Fer estimacions i plantejar mètodes informals per desenvolupar estratègies.
- Explorar cadascuna de les operacions fent servir models. Cal que els alumnes explorin la operació de manera informal i trobin les seves pròpies estratègies per tal de comprendre-la.

Tal com mostra Burns (2003), en el seu llibre, primer connecten les multiplicacions de nombres enters i fraccionaris i, llavors, fan estimacions de la operació. Per tant, segueix el que diuen Van de Walle et al (2010).

Segons esmenten Flores i Torralbo (2011) i que tenen en comú amb el que han dit Van de Walle et al. (2010), les operacions amb fraccions que es plantegen als infants sempre s'han de fer amb problemes amb un context senzill i de l'entorn. Tal com veiem, es començarà amb diversos tipus de problemes. Els primers problemes que es presentin de la operació cal que el primer factor sigui un nombre enter, per tant, es busqui la part fraccionaria d'un enter (Van de Wall, 2010: 323). Es segueix amb aquells en els quals no cal partir les unitat i, finalment, es presenten aquells en els que si cal partir-les. Aquests no cal que siguin molt elaborats, però si cal que el docent pensi bé en els nombres que es fan servir (Van de Walle et al., 2010: 322).

A més a més, segons les diferents situacions que ens podem trobar una multiplicació de fraccions descrites anteriorment, ens podem trobar amb els casos següents:

- Enter per fracció
- Fracció per enter
- Fracció per fracció

Pel que fa a la dificultat, el més elevat i per tant, la seva comprensió per part dels alumnes és més costosa és l'últim cas, fracció per fracció (Tipps et al., 2011: 332).

Caldria introduir-les en aquest ordre i començant amb les fraccions pròpies. Però, quan apareixen nombres mixtes, el tema es complica pel que fa a la comprensió per part dels alumnes.

Ensenyament-aprenentatge de l'algorisme tradicional

Per resoldre la multiplicació de fraccions, tenim l'algorisme tradicional que ens ajuda a resoldre-la indiferentment de la comprensió de la operació que es tingui. Aquest consisteix en multiplicar numerador per numerador i denominador per denominador i col·locar en una nova fracció els resultats en el numerador i denominador respectivament. Aquest algorisme és alhora fàcil d'ensenyar pels mestres i d'utilitzar pels alumnes (Tipps et al., 2011: 327).

Abans d'ensenyar aquest algorisme cal que els alumnes hagin de pensar sobre la multiplicació de fraccions i el seu significat. Els algorismes que aprenen els infants han de ser el resultat de moltes experiències, és a dir, a partir de les activitats que han pogut realitzar per comprendre el concepte (Tipps et al., 2011: 310). Similarment, Van de Walle et al. (2010: 324) afirma que si s'ha deixat el temps suficient perquè els infants explorin la operació, els serà relativament fàcil de desenvolupar l'algorisme tradicional. En canvi, si se'ls dona directament l'algoritme, no saben veure si el resultat té sentit o no (Van de Walle et al., 2010: 317). Flores i Torralbo (2011) afegeixen que els algorismes es poden presentar al final per simplificar els càlculs sempre i quan els alumnes els comprenguin.

Pel que fa a l'ensenyament de l'algorisme, hi ha diferents punts de vista. Alguns autors diuen que a l'Educació Primària, els alumnes haurien de fer servir algorismes inventats i deixar per als estudis posteriors el tradicional. Altres autors opinen el contrari i creuen que l'ús dels algorismes tradicionals ajuden a establir els fonaments per l'ús dels símbols en l'àlgebra (Tipps et al., 2011: 316-317). En el cas que se'ls ensenyi directament, realitzaran l'operació de manera ràpida però, això no significa que tinguin una bona comprensió del que estan fent.

Models de representació

A partir de les tres interpretacions que se'n poden fer, descrites anteriorment (com a fracció d'una fracció, com una àrea i com la part comuna de dues fraccions) Tucker et al. (2006: 219) diuen que només les dues primeres està demostrat que són efectives a l'aula pel fet que són fàcils de fer servir i són més significatives per als infants. En canvi, la interpretació com la part comuna de les dues fraccions és fàcil d'usar però no és significativa per als alumnes. D'acord amb Tucker et al., Lamon(2012: 155) diu que fent servir el model de l'àrea per aprendre la multiplicació és una bona manera. En canvi en el cas de multiplicar un nombre mixt per una fracció i dos nombres mixtes, és difícil pels alumnes utilitzar aquest model.

Amb la taula 3 de l'apartat 1.1.3 de la qual ens parlen Chapin i Johnson (2006: 126), els alumnes també poden observar la diferència entre multiplicar entre nombres enters o per un nombre fraccionari.

Referent als docents, quan ensenyen la multiplicació de fraccions, o qualsevol altre coneixement matemàtic, l'han de conèixer i comprendre. A més a més, ensenyar l'algorisme tradicional és aparentment fàcil per ensenyar per part del mestre/a i per aprendre per part de l'alumne/a (Tipps et al., 2011: 328). Tanmateix, el significat de l'operació és difícil de comprendre. Per això, perquè el docent pugui ensenyar-la, ha de saber què vol dir, quines són les seves aplicacions a la vida quotidiana i com els alumnes poden arribar a adquirir aquest coneixement perquè sigui significatiu.

2. Aplicació pràctica

En aquest apartat trobem la part pràctica de la recerca educativa portada a terme. Està dividit en tres blocs. En primer lloc, la metodologia on es detallen els objectius, el tipus d'investigació i les tècniques de recollida de dades emprades i les fases de tot el procés. En segon lloc, hi ha el buidatge de dades on hi trobem unes taules on s'hi recull tota la informació. En tercer lloc, hi ha els resultats i l'anàlisi de les dades que permetran treure conclusions.

2.1. Metodologia

2.1.1. Objectius de la recerca

Per dur a terme la investigació, al inici em vaig plantejar una objectius de recerca per tal d'assolir una vegada hagués portat a terme tot el procés. Aquests estan detallats a continuació:

- Estudiar el que els autors diuen sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions.
- Analitzar les creences que tenen diferents mestres sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions i quina metodologia utilitzen a l'aula.
- Comparar l'ensenyament que fan els mestres en relació a la multiplicació de fraccions amb el marc teòric elaborat.

2.1.2. Metodologia de recerca i tècnica de recollida de dades

El treball es basa en una investigació qualitativa, ja que pretenia fer una interpretació de com les mestres ensenyen la multiplicació de fraccions a partir de la comparació de les dades obtingudes amb el que diuen diferents autors experts en el seu ensenyament-aprenentatge.

Per recollir les dades, he escollit dues tècniques. Per una banda, l'entrevista que ha estat semiestructurada, ja que tenia el guió però també vaig preguntar altres dades que podien ser importants. Per una altra banda, el qüestionari que tenia com a preguntes les mateixes que l'entrevista.

Les preguntes de les entrevistes i dels qüestionaris són les següents:

1. Presentació del/ de la mestre/a

1.1. Nom i cognoms: e-mail:

1.2. Escola i curs en la qual està:

1.3. Formació acadèmica:

1.3.1. En general:

1.3.2. En matemàtiques:

1.4. Anys d'experiència:

1.5. Tipologies d'escoles en les quals has treballat (públiques, privades, concertades, ...):

1.6. Cicles/cursos en els que has estat ensenyant matemàtiques i temps:

1.7. Temps que fa que ensenyas matemàtiques:

2. Continguts/objectius

2.1. Quins objectius haurien d'assolir els alumnes en relació a la multiplicació de fraccions?

- 2.2. Quins continguts haurien de treballar els alumnes en relació a la multiplicació de fraccions per assolir els objectius?

3. A l'aula

- 3.1. Fas servir llibre de text?

Si ☐ Com l'utilitzes? (El segueixes fil per randa, incorpores activitats complementaries, és només una guia, ...) Quin fas servir?

No ☐ Com ho fas? (pre pares material a part, de quin tipus, ...)

Explicació:

Metodologia (ensenyament de les multiplicacions de fraccions)

- 3.2. Abans d'arribar a la multiplicació de fracció, quins coneixement relacionats amb la fracció ensenyas o s'ensenyen a l'escola? (fracció, comparació, fraccions equivalents, suma/resta...)
- 3.3. Com introdueixes la multiplicació de fraccions?
- 3.4. Com segueixes amb la multiplicació de fraccions?
- 3.5. Utilitzes algun tipus de material? En quin moment? Com el fas servir?
- 3.6. En algun moment ensenyas l'algorisme (multiplicar numerador per numerador i denominador per denominador)?

Si ☐ Quan i com ho fas?

No ☐ Com ho aprenen els alumnes? (ho descobreixen, ...)

Explicació:

- 3.7. Quin tipus de tasques plantejes als alumnes per treballar les multiplicacions de fraccions? (problemes, exercicis tancats/oberts, ...)
- 3.8. Quin és el paper que tens com a mestre/a durant les classes? I quin rol tenen els alumnes? (explicació del mestres, raonament dels alumnes, ...)
- 3.9. Altres comentaris:

4. Coneixements matemàtics

- 4.1. Quin concepte/s tens de les fraccions?
- 4.2. Què en saps de la multiplicació de fraccions?
- 4.3. Podries fer un dibuix per representar les següents multiplicacions posant-les en un context real?

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3} \times 9$$

$$24 \times \frac{1}{4}$$

2.1.3. Fases de la recerca

Per tal de dur a terme la recerca educativa desenvolupada en el present treball, he dut a terme un procés llarg i que s'explica a continuació:

En primer lloc, *vaig triar un tema* del qual m'interessava investigar, l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions, ja que per la meua experiència com a alumna no l'he viscuda tal com diuen diferents autors que s'han d'ensenyar. Aquests parlen, per exemple, sobre la utilització de material manipulatiu, seguit de la representació i arribant a fer-ho de manera abstracte. També vaig decidir que les escoles on aniria a recollir les dades serien les de Centelles i pobles propers.

En segon lloc, *vaig definir els objectius de recerca* i els quals volia assolir després de tot el procés. Aquests estan detallats en l'apartat 2.1.1. També em vaig formular dues *hipòtesis*.

En tercer lloc, vaig recollir la bibliografia necessària dels autors que parlessin de la multiplicació de fraccions i del seu ensenyament-aprenentatge, la vaig llegir i vaig *redactar el marc teòric*.

En quart lloc, *vaig escollir la tècnica d'investigació* que faria servir per recollir les dades. Aquesta va ser l'entrevista. Tanmateix, vaig afegir el qüestionari. Amb els dos podia recollir les dades que necessitava.

En cinquè lloc, vaig redactar el guió de l'entrevista i del qüestionari, anar als centres educatius que m'interessaven per si podia realitzar-la amb mestres de cicle superior. Quan vaig anar-hi, els vaig deixar una carta de presentació explicant que era una estudiant del 4t curs del Grau de Mestre d'Educació Primària, que estava fent el Treball de Final de Grau de sobre l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions i demanava si podria fer una entrevista amb les mestres de cicle superior o bé em podien respondre al qüestionari. Les escoles que vaig fer les entrevistes van ser els Sagrats Cors de Centelles i Joan XXIII dels Hostalets de Balenyà. Els qüestionaris els vaig portar a les escoles Valldeneu de Sant Martí de Centelles, La Muntanya d'Aiguafreda i L'Era de Dalt de Tona. Tots aquests centres són públics, excepte els Sagrats Cors.

També vaig anar a demanar per fer una entrevista a l'escola Ildefons Cerdà de Centelles. Unes setmanes després d'anar-hi, em va trucar la coordinadora de cicle superior i em va dir que aquest tema no el donen. El motiu és per la seva complexitat i el deixen perquè el facin a l'Educació Secundària quan els alumnes vagin al institut. També em va comentar que aquesta és una decisió que van prendre no fa gaire temps.

En sisè lloc, *vaig dur a terme les entrevistes* amb dues mestres de dues escoles i vaig recollir els *qüestionaris* que m'havien omplert quatre mestres de tres escoles diferents.

En setè lloc, *vaig fer el buidatge de dades* de les entrevistes que vaig col·locar en una graella. A l'apartat 2.2. es detalla com està feta i s'inclou la graella.

En vuitè lloc, vaig fer unes noves taules amb diferents categories per *treure'n els resultats i analitzar-los*. Les categories escollides estan triades en funció de la informació recollida al marc teòric i les dades de les entrevistes i qüestionaris.

Finalment, *vaig treure les conclusions* de la recerca educativa a partir de la comparació entre el marc teòric i els resultats obtinguts de l'anàlisi de dades.

2.2. Buidatge de dades

Després de fer les entrevistes a dues mestres i recollir els qüestionaris a quatre mestres més, he fet el buidatge de les dades. Per realitzar-ho, he fet una taula d'Excel on a cada columna hi ha un/a mestre/a. Pel que fa a les files, hi ha, en cadascuna d'elles, les diferents preguntes de l'entrevista/qüestionari, tot i que algunes estan agrupades.

La taula del buidatge de dades es mostra a continuació i està dividida en dues parts. En cadascuna d'elles consten tres mestres.

		Mestra 1 - Joan XXIII (Hostalets de Balenyà)	Mestra 2 - Escola Sagarts Cors (Centelles)	Mestra 3 - Escola Valldeneu (Sant Martí de Centelles)
Presentació mestre/a	Curs actual	5è de Primària	6è de Primària	2n i 3r Primària
	Formació acadèmica	En general	Mestra -Especialitat en Ciències. Oposicions.	Magisteri i arts aplicades a l'escultura
		En matemàtiques	Cursos de formació i jornades que es fan. Té interès per formar-se sempre que pot.	Cursos amb Carlos Gallego, Segarra i M ^a Antònia Canals.
	Experiència	Anys d'experiència	12 anys (4 anys i 8 anys per separat)	35 anys
		Tipologies d'escoles	Els primers 4 anys a una concertada i els últims 8 a en diferents centres públics.	Quasi sempre a la concertada.
		Cicles/cursos ensenyant matemàtiques	Els últims 8 anys ha estat sempre a Cicle Superior fent matemàtiques i ciències sobretot.	P5, CI, CS i ESO
Ensenyament multiplicació de fraccions - metodologia	Objectius en relació a la multiplicació de fraccions		* Comprendre el concepte gràficament.	*Resoldre la multiplicació (algorisme). *Comprendre el concepte.
	Continguts en relació a la multiplicació de fraccions		*Part d'una fracció.	*Multiplicació de fraccions. *Resolució de problemes.
	Fa servir llibre?		Sí	Sí
	Com ho fa?		És com una guia i de consulta pels alumnes. A més a més, afegeix exemples pràctics. També serveix de repàs del que s'ha fet. Prenen apunts a la llibreta en funció del que la mestra veu important. També se'n treuen alguns exercicis.	El segueixen perquè creuen que és molt complert a nivell d'exercicis, problemes. A vegades també afegeixen alguna activitat extra.
	Què fa abans d'introduir la multiplicació?		Treballar les fraccions amb la idea com a part d'una unitat per tenir clar per a què s'utilitzen les fraccions en general. També cal que entenguin què vol dir el numerador i el denominador i què és una unitat. Després, treballen la suma i resta de fraccions. Entendre també si se'ls demana fracció o quantitat. Parts iguals.	Treballar la fracció i què significa, què signifiquen els seus termes i com es llegeixen, comparant-la amb la unitat i amb altres fraccions, ordenar, fraccions equivalents, fracció és igual a una divisió i sumes i restes, nombres mixtes, simplificació de fraccions i fracció irreductible, fraccions equivalents a denominador comú, sumar i restar fraccions amb MCM.
	Com l'introdueix		S'introdueix amb un exemple i amb una demostració gràfica. Amb això fan particions d'una figura geomètrica que representa l'exemple.	Una fracció dins d'una altra fracció. S'introdueix amb dibuixos.
	Com segueix		Amb problemes.	L'algorisme és fàcil però els costa els problemes. Al final, els donen un resum que ve donat pels llibres.
	Utilitza material? Com?		No, per la multiplicació de fraccions.	No, però les llibretes amb els fulls quadriculat els ajuda a l'hora de representar les fraccions.
	Ensenya l'algorisme tradicional?		Sí	Sí
	(sí) Quan i com? (no) Com ho aprenen?		Es fa entre tot el grup classe a partir de les representacions i demanant: Què passa? Què veiem?	Els hi dona l'algorisme.
	Tipologies de tasques		Parlen molt i pregunta: Què hem fet? I això, què vol dir? Altres activitats són els problemes que presenta el llibre.	Són les del llibre.
	Rol del mestre/a		Preguntar: Tu què en penses? Creus que està bé el que ha dit el teu company/a?	Depèn del moment. A vegades explica la mestra. També els pregunten què en saben i els fan reflexionar. Les imatges que proporciona el llibre també les utilitzen per parlar-ne. Continuament els fan preguntes i dubtar per veure què ens saben.
	Rol de l'alumne/a		Els alumnes interactuen molt amb la mestra a través del diàleg.	Participen amb l'atenció, amb preguntes i diàleg amb la mestra.
	Altres comentaris		Destaca que es fa una pinzellada, al contrari que amb la suma i resta de fraccions.	-
Coneixements del mestre/a de les fraccions	Concepte/s de fraccions		És una part d'una unitat i aquesta pot ser qualsevol cosa que es pugui dividir en part iguals. Es pot dir de diferents maneres. Les fraccions tenen relació amb els nombres decimals i amb els percentatges.	és una partició exacte d'un tot i una divisió. És molt aplicable a la realitat.
	Coneixements sobre la multiplicació de fraccions		És una part d'una altra part. Fraccionar una fracció. És Inversa a la multiplicació d'enters.	És una fracció d'una fracció, és a dir, dividir en parts més petites una altra part.
	Dels tres exemples		Enter per fracció i fracció per fracció.	Els tres.

		Mestra 4 - Escola la Muntanya (Aiguafreda)	Mestre 5 - Escola l'Era de Dalt (Tona)	Mestra 6 - Escola l'Era de Dalt (Tona)
Presentació mestre/a	Curs actual	6è de Primària	-	5è de Primària
	En general	Diplomada professora EGB	Mestre especialitat Educació Física	Mestra Educació Física
	En matemàtiques	Formació permanent en diferents cursos acadèmics.	Introducció mètode Montessori.	-
	Anys d'experiència	34 anys	7 anys	15 anys
	Tipologies d'escoles	Concertades i públiques.	Públiques (ZER, 1 i 2 línies)	Pública, pública ZER i concertada.
	Cicles/cursos ensenyant matemàtiques	Ha estat en tots els cursos d'Educació Primària.	CI - 1 any, CM - 1 any, CS - 3 anys (cursos sencers amb el mateix curs)	CS - 8 anys, CM - 3 anys, CI - 2 anys i Infantil - 1 any. Entremig sense fer matemàtiques
Ensenyament multiplicació de fraccions - metodologia	Objectius en relació a la multiplicació de fraccions	*Calcular el Producte d'un nombre per una fracció. *Multiplicar fraccions.	*Comprendre que la multiplicació de fraccions és una fracció d'una altra fracció. *Conèixer i utilitzar l'algorisme ràpid que permet multiplicar fraccions.	-
	Continguts en relació la multiplicació de fraccions	*Fracció d'un nombre. *Multiplicació de fraccions.	*Concepte de fracció i les seves parts. *Multiplicació d'un enter per una fracció. *Multiplicació d'una fracció per un enter.	-
	Fa servir llibre?	Sí (Edebé)	Sí (Vicens Vives)	Sí (Vicens Vives)
	Com ho fa?	Serveix de guia.	Fan les unitats senceres però desordenades en funció de les necessitats. Tenen un quadernet amb activitats complementàries.	És una guia i poden fer-lo servir de consulta. També es fan els exercicis del llibre i tenen un quadern amb altres exercicis.
	Què fa abans d'introduir la multiplicació?	*Trobar la fracció d'un nombre en problemes de la vida quotidiana. *Sumar i restar amb igual/diferent denominador. *Aplicar l'algorisme que permet reduir a comú denominador 2 o més fraccions. *Identificar i obtenir fraccions equivalents. *Reconèixer el mètode de simplificació de fraccions. *Representar la comparació de fraccions.	*Concepte de fracció i les seves parts (numerador i denominador). *Comparació i suma de fraccions. *Multiplicació (concepte i taules). *Multiplicació enter per fracció i a l'inversa.	Noció de fracció, comparació, fracció, nombre mixta i n ^o decimal, fracció equivalent i suma i resta de fraccions.
	Com l'introdueix	Després de tot el que els alumnes saben de fraccions, els explica com es multiplica.	A 6è, hi dediquen 2 o 3 sessions. Comença comparant-la amb la fracció per enter. $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6}$ i $\frac{1}{2}$ de $12 = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ A continuació fan la representació gràfica. Llavors posa un altre exemple: $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ amb una representació. Finalment, amb els dos exemples anteriors, explica l'algorisme i llavors, apliquen la part mecànica.	A 5è, primer amb dibuixos i després explicant la tècnica de multiplicació de fraccions.
	Com segueix	-	-	Aplicant exercicis metòdics i aplicant-la a problemes matemàtics.
	Utilitza material? Com?	No.	De moment no.	Activitats de la PDI.
	Ensenya l'algorisme tradicional?	Sí	Sí.	Sí.
	(sí) Quan i com? (no) Com ho aprenen?	Simplement explicant com es multiplica i practicant-ho.	Perquè a la multiplicació hi dediquen 2 o 3 sessions. L'ensenya just després de comparar-la amb la multiplicació fracció per enter i entès amb la representació gràfica.	Sempre fan servir el llenguatge matemàtic. És important que coneguin la nomenclatura. Ho aprenen fàcilment. Explica la tècnica de l'algorisme tradicional.
	Tipologies de tasques	*Exercicis tancats i oberts. *Problemes on sorgeixi el producte de fraccions.	Problemes i bateria d'operacions, barrejant el llenguatge " $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ " i " $\frac{1}{2} \times$ de $\frac{3}{4}$ "	De tot tipus.
	Rol del mestre/a	*Hi ha unes prèvies en què els alumnes han de recordar i explicar el que saben del tema. *Com a mestra segueix el que diuen i continua amb els objectius i continguts que vol que aprenguin. *Practiquen allò que han après.	Introducció inicial del tema, oferir propostes d'activitats adequades al nivell de cada alumne.	Guiar l'aprenentatge, proposar exercicis i ajudar en les correccions.
	Rol de l'alumne/a	Diàleg amb la mestra.	Entendre, dur a terme les activitats i deduir i incorporar nous coneixements i processos.	-
	Altres comentaris	-	Aquest curs, la multiplicació de fraccions no ha estat un contingut prioritari.	-
Coneixements del mestre/a de les fraccions	Concepte/s de fraccions	-	Creu que és un tema molt interessant i que es pot aplicar fàcilment a la vida quotidiana.	Fracció = representació numèrica de la part que volem expressar a partir d'un tot.
	Coneixements sobre la multiplicació de fraccions	-	Creu que la multiplicació i divisió de fraccions són aspectes que posteriorment s'apliquen menys a la vida quotidiana.	-
	Dels tres exemples	Cap.	Els tres.	Els tres.

2.3. Resultats de l'anàlisi de les dades

Després d'haver fet el buidatge de les dades recollides amb les entrevistes i els qüestionaris, a continuació hi ha els resultats extrets de l'anàlisi d'aquestes. Per cada categoria que he seleccionat, hi ha una taula amb els resultats i una descripció d'aquesta en relació a la categoria.

2.3.1. Categories

Experiència dels mestres

Categoria	Ítems		Mestres					
			Mestra 1	Mestra 2	Mestra 3	Mestra 4	Mestra 5	Mestra 6
Experiència	Temps	Menys de 10 anys			x		x	
		De 10 a 20 anys	x					x
		Més de 20 anys		x		x		

Taula 5: Resultats - experiència dels mestres.

En aquesta taula es poden veure els *anys d'experiència dels mestres* que formen part de la mostra de la recerca educativa. Estan agrupades en tres períodes: menys de 10 anys que exerceixen la professió, de 10 a 20 anys i més de 20 anys. Com es pot observar, n'hi ha 2 de cadascuna. Per tant, hi ha molta diferència de temps d'experiència entre alguns mestres.

Materials i recursos

Categoria	Ítems		Mestres					
			Mestra 1	Mestra 2	Mestra 3	Mestra 4	Mestra 5	Mestra 6
Material i recursos	Material manipulatiu	Sí						
		No	x	x	x	x	x	x
	Llibreta amb fulls quadriculats			x				
	Llibre de text	No es fa servir						
		De guia	x			x		x
		Se segueix tot		x			x	x
		Ús de les activitats	x	x	x		x	x
		De consulta	x					
	Altres	Activitats proposades pel mestre/a	x	x	x			
		Quadernet d'activitats					x	x

Taula 6: Resultats - materials i recursos.

Amb aquesta taula podem veure la categoria dels *materials i recursos* que utilitzen els mestres a l'aula. Pel que fa als materials manipulatius, no n'hi ha cap que n'utilitzi amb la multiplicació de fraccions.

Referent a altres recursos com el llibre de text, el 100% dels mestres en tenen a l'aula per cadascun dels alumnes. Segons l'ús que se'n fa, surten els resultats següents:

- 50% el segueixen tot, 16'7% el fan servir de guia i de consulta alhora, el 16'7% només el fan servir de guia i només agafa les activitats.
- Pel que fa a les activitats que proposa el llibre, 83,3% les utilitza en les seves classe.

Com a altres recursos, el 33'3% agafen les activitats d'un quadernet que tenen complementari (són de la mateixa escola) i el 50% afegeixen altres activitats extres. El 16'7% restant, no en fa referència.

Només un 16'7% ha comentat que tenen en compte un altres aspecte dels recursos. Les llibretes que utilitzen els alumnes per fer la feina de l'aula, tenen els fulls quadriculats per tal que els sigui més fàcil fer les representacions que indica cada fracció i que les seves part han de ser iguals (ocupin el mateix).

Algorisme tradicional

Categoria	Ítems	Mestres					
		Mestra 1	Mestra 2	Mestra 3	Mestra 4	Mestre 5	Mestra 6
Algorisme tradicional	El descobreixen els alumnes						
	Els hi dona el/la mestre/a	x	x	x	x	x	x
	Com l'ensenya?	De forma mecànica	x	x	x	x	x
		Amb preguntes / comentaris	x				
		Amb representacions	x			x	

Taula 7: Resultats - algorisme tradicional.

En aquesta taula es pot veure la categoria de l'*algorisme tradicional*. Respecte aquest, s'observa que el 100% dels mestres ensenyen l'algorisme tradicional, enlloc de deixar que el descobreixin ells mateixos i així trobin els seus propis algorismes.

A més a més, el 100% ensenyen directament la mecànica, és a dir, multiplicar numerador per numerador i denominador per denominador amb una nova fracció com a resultat que té com a numerador i denominador els dos resultats anteriors respectivament. Només un 33'3% diu que ho acompanya amb representacions i la meitat d'aquests fa preguntes. Així, veiem que 66,6% ho fa de forma totalment abstracte.

Introducció de la multiplicació de fraccions

Categoria	Ítems		Mestres					
			Mestra 1	Mestra 2	Mestra 3	Mestra 4	Mestre 5	Mestra 6
Introducció de la multiplicació de fraccions	Suport	Material manipulatiu						
		Representació gràfica	x	x			x	x
		Abstracte - símbols			x	x	x	
	Coneixements previs	Fracció com una divisió		x				
		Fracció com una proporció						
		Fracció com una part d'una unitat	x	x	x			
		Fracció com un operador				x	x	
		Fracció com una mesura						
		Com un nombre						
		Fracció sense especificar						x
		Fraccions equivalents, suma i resta, ...	x	x	x	x	x	x
		Multiplicació amb enters					x	

Taula 8: Resultats - introducció de la multiplicació de fraccions.

En aquesta taula es veuen els elements que fan referència a la categoria de *introducció de la multiplicació de fraccions*.

Pel que fa al suport que utilitzen els mestres per introduir la multiplicació de fraccions com a nou concepte matemàtic, no n'hi ha cap que faci servir material manipulatiu. Que utilitzi la representació gràfica, són el 66'7%. La resta ho fa de manera abstracte. Del total, només un 16'7% la introducció del concepte de manera abstracte amb la representació gràfica.

Pel que fa als coneixements previs dels alumnes, tots treballen la fracció, les fraccions equivalents, la comparació de fraccions, la suma i resta de fraccions, entre altres.

Només el 16'7% ha mencionat la multiplicació de nombres enters abans d'introduir la multiplicació de dues fraccions.

Pel que fa a les diferents interpretacions que es poden fer de les fraccions:

- 16'7% no especifica quines interpretació/ns de la fracció fan.
- 33'3% l'ensenya com a operador i un terç d'aquests també l'ensenya com un operador.
- 50% diuen que fan la fracció com a part d'una unitat.

Molts esmenten que ensenyen la noció/concepte de fracció abans de fer la multiplicació de fraccions. Això suposem que és com a part d'una unitat.

Coneixements que tenen els mestres de la fracció i la multiplicació de fraccions

Categoria	Ítems		Mestres					
			Mestra 1	Mestra 2	Mestra 3	Mestra 4	Mestre 5	Mestra 6
Coneixements que té el/la mestre/a	Fracció	Com una divisió		x				
		Com una proporció						
		Com una part d'una unitat	x	x	x			x
		Com un operador						
		Com una mesura						
		Com un nombre						
		No diu res				x	x	
	Multiplicació de fraccions	Definició	x	x				
		Algorisme tradicional			x			
		No diu res				x	x	x
	Posar exemples	Enter per fracció	x	x	x		x	x
		Fracció per enter		x	x		x	x
		Fracció per fracció	x	x	x		x	x

Taula 9: Resultats - coneixements que tenen els mestres de la fracció i la multiplicació de fraccions.

En aquesta taula es pot veure la categoria de *coneixements que tenen els mestres* en relació a les fraccions i a les multiplicació de fraccions. Pel que fa a les interpretacions que se'n poden fer de les fraccions, el 33'3% no en detalla cap, el 66'7% parla de fracció com a part d'una unitat i d'aquest, la quarta part també diu que la fracció es pot entendre com una divisió.

Si ens fixem en la multiplicació de fraccions, el 50% no en diu res, el 16'7% fa la definició de l'algorisme tradicional i el 33'3% la defineix com una part d'una altra part o fracció d'una fracció.

En l'entrevista i els qüestionaris, els vaig posar una multiplicació de fracció per enter, una altra d'enter per fracció i una de fracció per fracció. Al demanar que en posessin un exemple escrit i representat amb un dibuix, els resultats segons el que es pot veure a la taula són els següents:

- El 66'7% posa un exemple de cada cas.
- El 16'7% només posa un exemple d'enter per fracció i de fracció per fracció.
- El 16'7% no ha posat cap exemple.

3. Conclusions

En aquest apartat hi ha les conclusions a les que he arribat en relació a l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions després de tot el procés de recerca. En aquest he confegit un marc teòric a partir de la informació que aporta cada autor, he recollit unes dades amb entrevistes i qüestionaris i he tret uns resultats que he analitzat. A les conclusions faig la comparació entre els resultats i el marc teòric. Aquí faig referència a les taules de l'apartat 2.3.1.

Els tres estadis que menciona Bruner pels quals s'ha de passar a l'hora d'aprendre un coneixement matemàtic són el concret, el de representació i l'abstracte. Així, quan s'enseny la multiplicació de fraccions cal que primer ho experimentin amb material manipulatiu, seguit de representar-ho sobre un paper fins a resoldre-ho de manera abstracte amb nombres i símbols. Dels resultats obtinguts amb la taula 8, puc dir que cap mestre ha utilitzat material per introduir la multiplicació de fraccions, al contrari del que diu Bruner. El 33'3% ho fan de forma totalment abstracte. D'aquesta manera deixen de banda els dos nivells anteriors, concret i representació.

Tipps et al. (2011: 327) i Van de Walle et al. (2010: 324) diuen que abans d'ensenyar l'algorisme tradicional, els infants han de tenir moltes experiències amb problemes i situacions en la qual intervingui la multiplicació de fraccions. Amb aquestes han de poder utilitzar les seves pròpies estratègies i algorismes i arribar a comprendre-la. En el moment que tinguin aquesta comprensió, els serà més fàcil d'entendre l'algorisme tradicional. Al contrari del que diuen els autors, els resultats que han sortit a partir de l'anàlisi de les dades a la taula 7, mostren que els mestres entrevistats ensenyen l'algorisme tradicional, majoritàriament, de manera abstracte i sense deixar abans que els nens/es pensin. Aquest fet crec que és pel que diuen Tipps et al. (2010: 327) quan afirmen que l'algorisme és fàcil d'ensenyar pels mestres i d'utilitzar pels alumnes, encara que aquests no reconeguin si el resultat té sentit o no.

Continuant amb l'algorisme tradicional, els resultats de la taula 7 mostren que només un 16'7% dels mestres acompanyen el seu ensenyament de forma mecànica amb preguntes als alumnes i comentant què passa. Precisament, dins de la teoria d'aprenentatge del constructivisme, Vygotsky (1962), citat per Tipps et al. (2011: 58), diu que és important el feedback i el diàleg per anar construint el coneixement i la comprensió del que van aprenent. Per tant, hi ha molts pocs mestres que tinguin en compte aquest aspecte.

Pel que fa als coneixements previs necessaris per a comprendre la multiplicació de fraccions, Van de Walle et al. (2010: 316) diuen que han de tenir una base consolidada del concepte de fracció. Segons els resultats de la taula 8, el 100% dels mestres treballen la fracció, la fracció equivalent, la comparació de fraccions, entre altres. Per tant, aquest aspecte si es compleix. Però, Chapin i Johnson (2006: 125) afirmen que el producte de fraccions requereix la fracció amb una determinada interpretació: la fracció com a operador. Amb els resultats es pot veure que només el 33'3% ensenya aquesta interpretació.

Altrament, la multiplicació de fraccions també es pot introduir amb la comparació amb la multiplicació de nombres enters (Chapin i Johnson, 2006: 125; Van de Walle et al., 2010: 3016; Burns, 2006). Dels mestres entrevistats, no hi ha ningú que faci la introducció amb aquesta comparació, però un mestre, tal com es veu a la taula, al qüestionari va respondre com a coneixements previs que, abans de la multiplicació de fraccions, treballaven el producte de nombres enters (les taules de multiplicar).

Amb la taula 5 es pot veure que els mestres entrevistats tenen diferents anys d'experiència; dos de menys de 10 anys, dos de 10 a 20 i dos de més de 20. Amb els resultats obtinguts amb l'anàlisi de les dades, es pot intuir que l'experiència a nivell d'anys no influeix en l'ensenyament que proporciona als seus alumnes respecte a la multiplicació de fraccions o qualsevol altre coneixement matemàtic. Dels resultats s'ha pogut veure que no fan els que els diferents autors recomanen per l'ensenyament del producte de fraccions.

Un altre aspecte que vull tractar i que no està reflectit en l'anàlisi de les dades però que els mestres em van comentar és el fet que hi dediquen molt poc temps a l'ensenyament de la multiplicació de fraccions i que ho fan per sobre. Això també està directament relacionat amb el fet que no segueixin les etapes de Bruner, no relacionin la multiplicació de fraccions amb la de nombres enters i no proposin als alumnes situacions i problemes perquè pensin els seus propis algorismes i estratègies i, en canvi, donin directament de forma mecànica la multiplicació de fraccions.

Tal com deia al inici del treball, em vaig plantejar dues hipòtesis en relació a l'ensenyament-aprenentatge de la multiplicació de fraccions. La primera va ser que la majoria de mestres ensenyarien la multiplicació de fraccions amb l'algorisme tradicional. La segona va ser que la majoria de mestres no utilitzarien materials manipulatius per ensenyar la multiplicació de fraccions. Les dues s'han complert

encara que els autors diuen tot el contrari. Per una banda, abans d'ensenyar l'algorisme tradicional, cal que els alumnes puguin experimentar i pensar les seves pròpies estratègies i algorismes en les diferents situacions en les quals es planteja el producte de fraccions. Per altra banda, Bruner ens diu que és necessari introduir qualsevol tema amb material manipulatiu.

Com a valoració final, crec que aquest Treball de Final de Grau em pot servir com a punt de partida per estudis superior com el Treball de Final de Màster. Ara tinc una visió de com ensenyen la multiplicació a les escoles a partir d'una mostra de 6 mestres. Tanmateix, no puc generalitzar i afirmar que totes les escoles ho treballin de la mateixa manera. Arribats a aquests punt, se'm plantegen preguntes del tema del qual he fet la recerca, com:

- Quins coneixements tenen de la multiplicació de fraccions els alumnes dels mestres entrevistats?
- Quines estratègies i algorismes propis utilitzarien els alumnes en el cas que se'ls deixés tenir experiències amb diferents situacions tal com diuen els autors?
- I si seguissin els tres nivells de Bruner, concret, representació i abstracte, com canviaria la seva comprensió respecte la multiplicació de fraccions?
- Si la mostra de mestres fos més gran, els resultats haurien estat diferents?

Una vegada arribat al final d'aquest treball, em toca fer una reflexió de tot el procés de la recerca i també dels quatre anys que he estat fent el Grau de Mestre d'Educació Primària. Són molts els aprenentatges adquirits, ja que hem tocat diferents assignatures en relació a l'ensenyament i al desenvolupament dels infants al llarg de l'etapa de 6 a 12 anys. Si em centro amb les matemàtiques, ja que és l'itinerari que he escollit com a especialització, m'ha ajudat a conèixer millor com ensenyar-les. Crec que hi ha molt desconeixement pel que fa a l'ensenyament d'aquesta matèria i per això, no es valora prou bé. Amb el que he fet durant aquest temps, tinc més ganes d'anar-me formant, no només a nivell de matemàtiques, sinó amb totes les matèries les quals ensenyaré a l'aula i altres aspectes que em puguin ajudar a millorar el meu dia a dia a l'escola amb els meus futurs alumnes.

4. Bibliografia

- Burns, Marilyn (2003). *Lessons for multiplying and dividing fractions. Grades 5-6*. Sausalito: Math Solutions Publications.
- Chapin, Suzanne H.; Johnson, Art (2006). "Chapter 5: Fractions". Dins: *Math matters: understanding the math you teach, grades k-8* (2a ed.). Sausalito: Math Solutions Publications.
- Departament d'Educació. (2009). *Currículum d'educació primària*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.
- Flores, Pablo; Torralbo, Manuel (2011). "Capítulo 8: Números racionales". Dins: Segovia, Isidoro; Rico, Luis. *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Lamon, Susan (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New York: Routledge.
- Rodríguez, Francisco (2002). "Capítulo 7. Propuestas para una didáctica del espacio urbano: un enfoque crítico y constructivista". Dins: Barberà, Elena; et al. *El constructivismo en la práctica* (2ª ed.). Barcelona: Graó.
- Tipps, Steve; Johnson, Art; Kennedy, Leonard M. (2011). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont: Wasworth Cengage Learning.
- Tucker, Benny F.; Singleton, Ann H.; Weaver, Terry L. (2006). *Teaching Mathematics to ALL Children. Designing and Adapting Instruction to Meet the Needs of Diverse Learners*. New Jersey: Pearson Education.
- Van de Walle, John A.; Karp, Karens S.; Bay-Williams, Jennifer M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (7a ed.). Boston: Pearson.